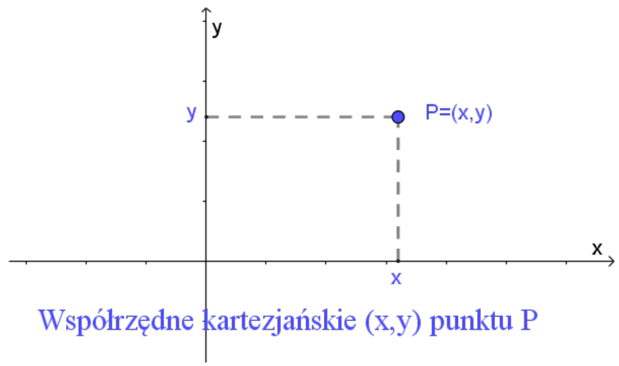
Współrzędne biegunowe, walcowe i sferyczne
Krzywe stożkowe
Powierzchnie drugiego stopnia

Anna Bahyrycz

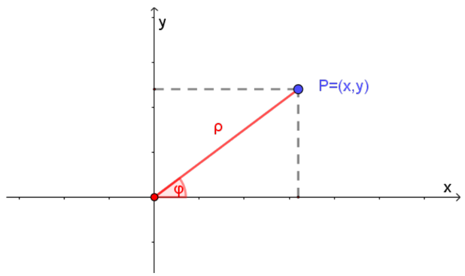
Współrzędne kartezjańskie na płaszczyźnie

Do tej pory, gdy chcieliśmy określić położenie punktu P na płaszczyźnie z wprowadzonym układem współrzędnych podawaliśmy jego współrzędne kartezjańskie (x, y).



Współrzędne biegunowe

Czy można inaczej w jednoznaczny sposób określić położenie punktu P na płaszczyźnie z wprowadzonym układem współrzędnych?

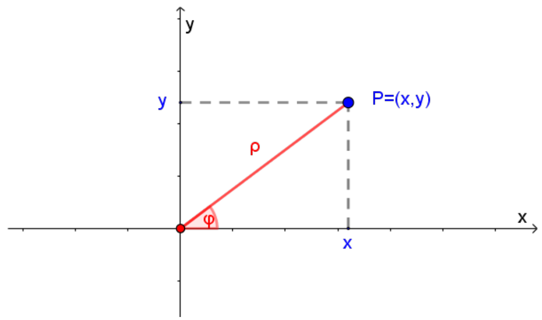


Tak, można opisać położenie punktu P parą liczb (φ, ρ), gdzie:

- φ oznacza miarę kąta miedzy dodatnią częścią osi $0x$ a promieniem wodzącym punktu P, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ albo $-\pi \leqslant \varphi < \pi$;
- ρ oznacza odległość punktu P od początku układu współrzędnych, $\rho \geqslant 0$.

Parę (φ, ρ) nazywamy współrzędnymi biegunowymi punktu P.

Jaki jest związek miedzy współrzędnymi kartezjańskimi (x, y) punktu P a współrzędnymi biegunowymi (φ, ρ)?



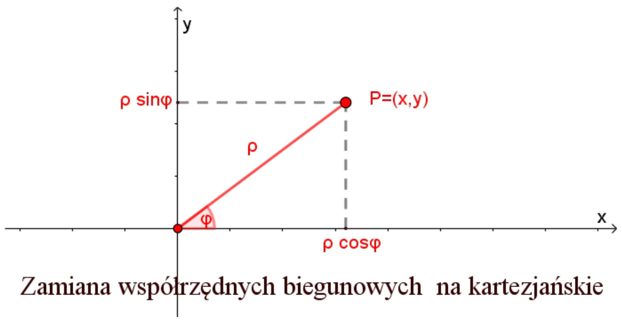
Zauważmy, że $\cos\varphi = \dfrac{x}{\rho}$ i $\sin\varphi = \dfrac{y}{\rho}$, a stąd $x = \rho\cos\varphi$ i $y = \rho\sin\varphi$.

Zamiana współrzędnych biegunowych na kartezjańskie

Zatem współrzędne kartezjańskie (x, y) punktu P płaszczyzny danego we współrzędnych biegunowych (φ, ρ) określone są wzorami:

$$B : \begin{cases} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \end{cases}$$

gdzie $\rho \geqslant 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ albo $\varphi \in [-\pi, \pi)$.

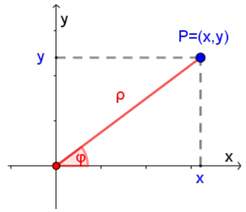


Jeśli $\rho \neq 0$ i $x \neq 0$, to

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

ponadto

$$\operatorname{tg}(\varphi - \pi) = \operatorname{tg}(\varphi - 2\pi) = \operatorname{tg}\varphi,$$



więc współrzędne biegunowe (φ, ρ) punktu P płaszczyzny danego we współrzędnych kartezjańskich (x, y) określone są wzorami:

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) & \text{gdy } x > 0 \text{ oraz } y \geqslant 0 \\ \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) + 2\pi & \text{gdy } x > 0 \text{ oraz } y < 0 \\ \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) + \pi & \text{gdy } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{gdy } x = 0 \text{ oraz } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{gdy } x = 0 \text{ oraz } y < 0 \end{cases}$$

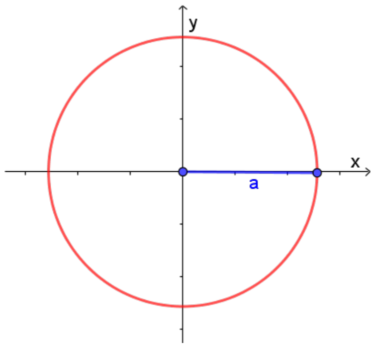
oraz

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Przykład 1

Naszkicować krzywą

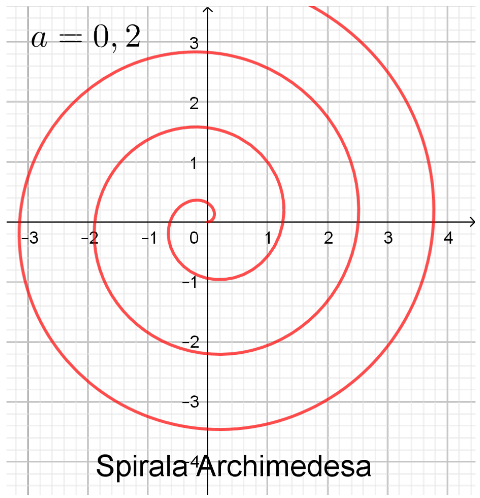
$$\rho = a, \quad \textit{gdzie } a > 0 \textit{ oraz } \varphi \in [0, 2\pi).$$



Przykład 2

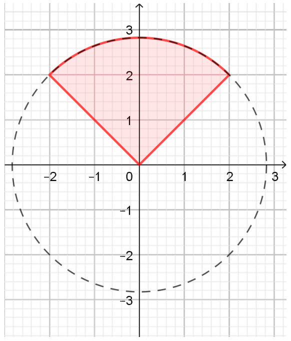
Naszkicować krzywą

$$\rho = a\varphi, \quad \textit{gdzie } a > 0 \textit{ oraz } \varphi \in [0, +\infty).$$



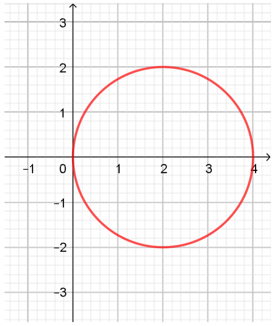
Przykład 3

Obszar przedstawiony na rysunku zapisać we współrzędnych biegunowych.



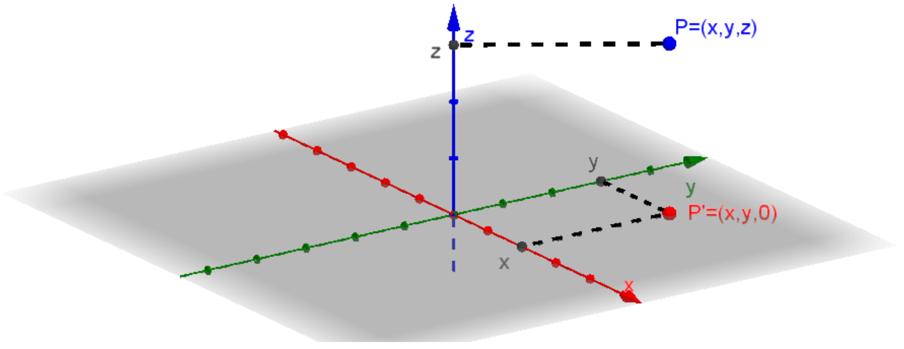
Przykład 4

Krzywą przedstawioną na rysunku zapisać we współrzędnych kartezjańskich oraz biegunowych.



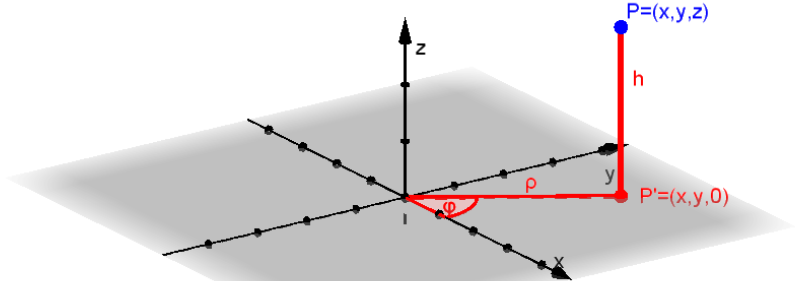
Współrzędne kartezjańskie w przestrzeni

Do tej pory, gdy chcieliśmy określić położenie punktu P w przestrzeni z wprowadzonym układem współrzędnych podawaliśmy jego współrzędne kartezjańskie (x, y, z).



Położenie punktu P w przestrzeni z wprowadzonym układem współrzędnych można określić jednoznacznie również w inny sposób np. podając jego współrzędne walcowe lub sferyczne.

Współrzędne walcowe



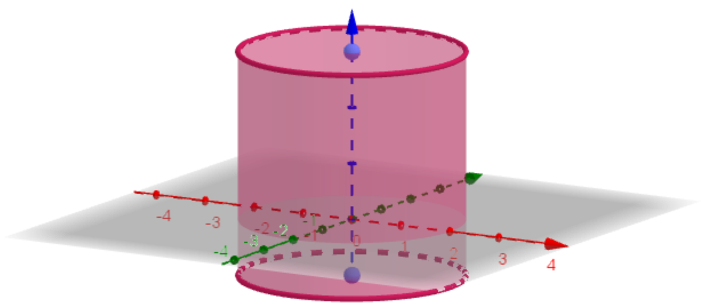
- φ oznacza miarę kąta miedzy dodatnią częścią osi $0x$ a rzutem promieniem wodzącego punktu P na płaszczyznę $x0y$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ albo $-\pi \leqslant \varphi < \pi$;
- ρ oznacza odległość rzutu punktu P na płaszczyznę $x0y$ od początku układu współrzędnych, $\rho \geqslant 0$;
- h oznacza odległość punktu P od płaszczyznę $x0y$ wziętą ze znakiem minus gdy $z < 0$, $-\infty < h < \infty$.

Trójkę (φ, ρ, h) nazywamy współrzędnymi walcowymi punktu P.

Przykład 5

Naszkicować powierzchnię

$$\rho = 2, \quad \textit{gdzie } -1 \leqslant h \leqslant 3 \textit{ oraz } \varphi \in [0, 2\pi).$$

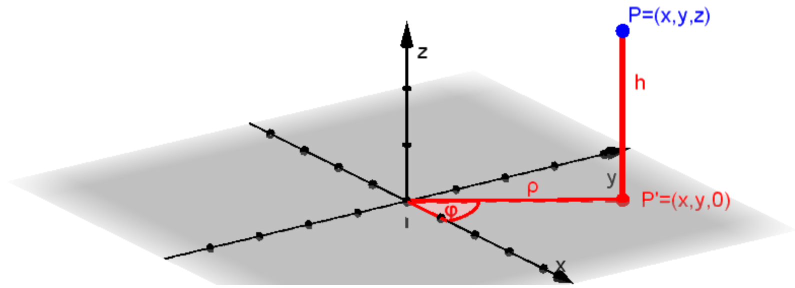


Zamiana współrzędnych walcowych na kartezjańskie

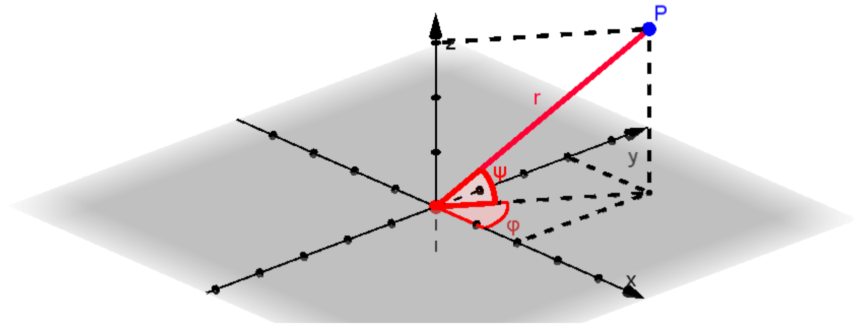
Współrzędne kartezjańskie (x, y, z) punktu P w przestrzeni danego we współrzędnych walcowych (φ, ρ, h) określone są wzorami:

$$W : \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = h \end{cases}$$

gdzie $\rho \geqslant 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ albo $\varphi \in [-\pi, \pi)$, $-\infty < h < \infty$.



Współrzędne sferyczne



- φ oznacza miarę kąta miedzy dodatnią częścią osi $0x$ a rzutem promienia wodzącego punktu P na płaszczyznę $x0y$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$;
- ψ oznacza miarę kąta miedzy promieniem wodzącym punktu P a płaszczyzną $x0y$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$
- r oznacza odległość punktu P od początku układu współrzędnych, $r \geqslant 0$;

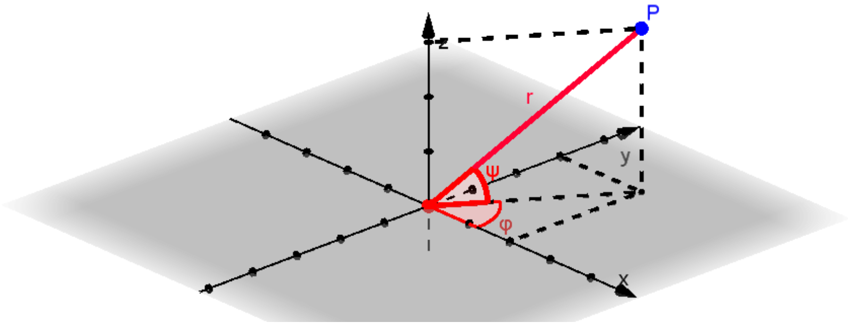
Trójkę (φ, ψ, r) nazywamy współrzędnymi sferycznymi punktu P.

Zamiana współrzędnych sferycznych na kartezjańskie

Współrzędne kartezjańskie (x, y, z) punktu P w przestrzeni danego we współrzędnych sferycznych (φ, ψ, r) określone są wzorami:

$$W: \begin{cases} x &= r\cos\varphi\cos\psi \\ y &= r\sin\varphi\cos\psi \\ z &= r\sin\psi \end{cases}$$

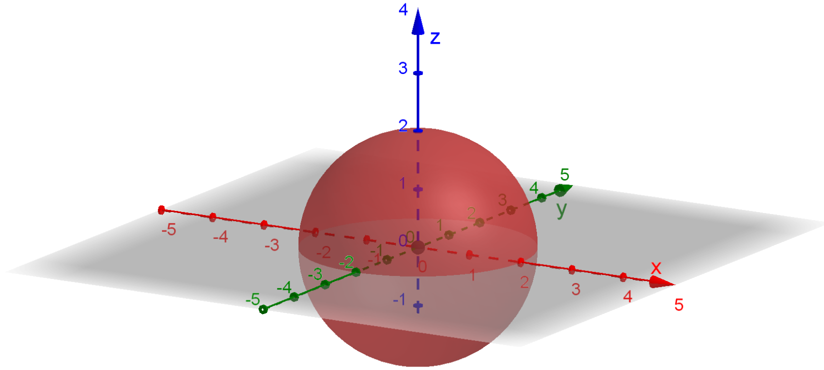
gdzie $r \geqslant 0,\ \ \varphi \in [0, 2\pi),\ \ -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}.$



Przykład 6

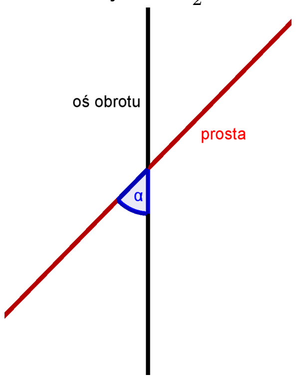
Naszkicować powierzchnię

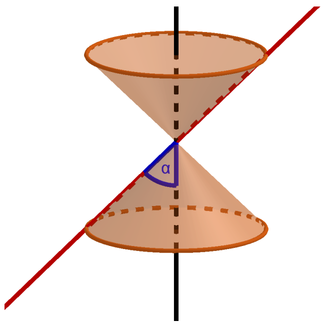
$$r = 2, \quad \textit{gdzie}\ \ \varphi \in [0, 2\pi),\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$



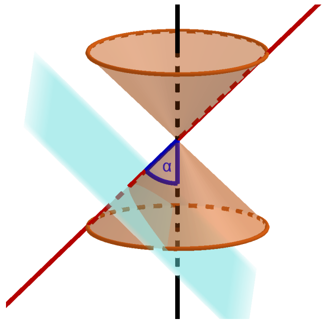
Krzywe stożkowe

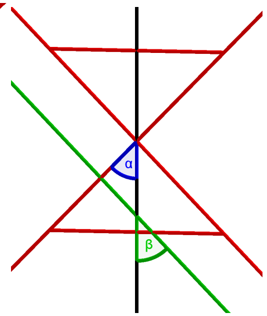
Szczególnym rodzajem powierzchni stożkowej jest powierzchnia stożkowa obrotowa, którą zakreśla prosta przecinająca się z osią obrotu pod kątem α różnym od $\frac{\pi}{2}$.



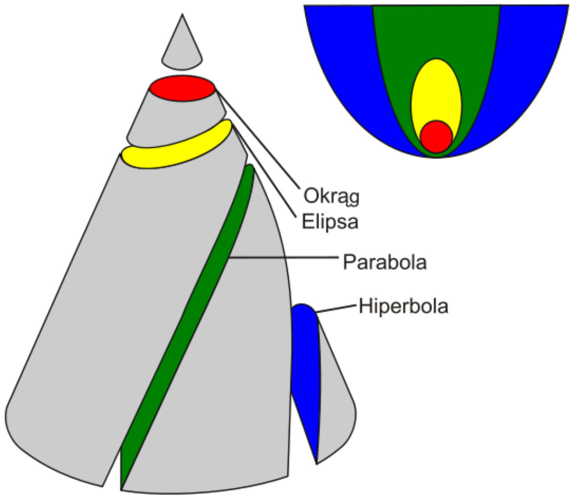


Przekrojami powierzchni stożkowych obrotowych płaszczyznami nie przechodzącymi przez wierzchołek powierzchni stożkowej są krzywe stożkowe: okręgi, elipsy, parabole albo hiperbole. Jaką krzywą otrzymamy zależy od kąta nachylenia płaszczyzny (tnącej) do osi stożka (kąt $0 < \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$).





Jeśli:
$\beta = \frac{\pi}{2}$ - okrąg,
$\beta > \alpha$ - elipsa,
$\beta = \alpha$ - parabola,
$\beta < \alpha$ - hiperbola.



Autor: Szwejk

Krzywe stożkowe są krzywymi drugiego stopnia, tzn. można je w kartezjańskim układzie współrzędnych opisać równaniem algebraicznym drugiego stopnia względem obu zmiennych x i y:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0,$$

gdzie $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ i przynajmniej jeden ze współczynników A, B, C musi być różny od zera.

Okrąg

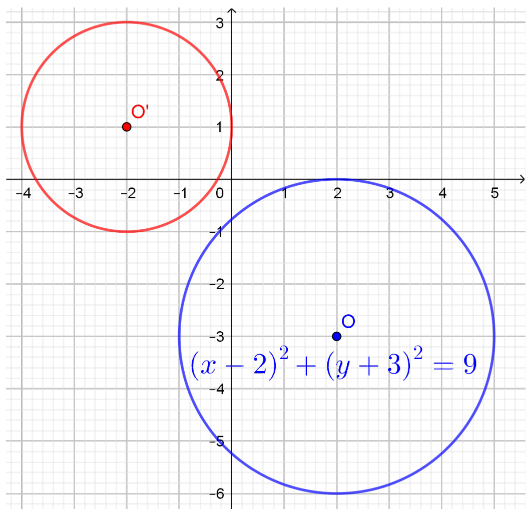
Niech $O = (x_0, y_0)$ będzie ustalonym punktem, zaś r ustaloną liczbą dodatnią. Okręgiem o środku w punkcie O i promieniu r jest zbiór punktów płaszczyzny spełniających równanie

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Jest to wzór geometrii analitycznej obowiązujący w kartezjańskim układzie współrzędnych.

W układzie współrzędnych biegunowych, równanie okręgu o promieniu r i środku $O = (0, 0)$, przyjmuje postać $\rho = r$ dla dowolnego kąta $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Okrąg



Elipsa

Elipsa w postaci kanonicznej o środku symetrii w punkcie $O = (x_0, y_0)$ opisana jest w układzie współrzędnych kartezjańskich równaniem

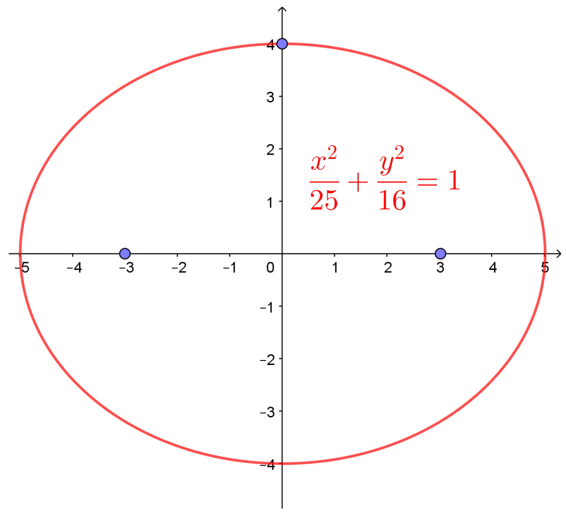
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

gdzie a i b są długościami półosi.

W układzie współrzędnych biegunowych (φ, ρ) elipsę o środku symetrii w punkcie $O = (0,0)$ opisuje wzór

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 sin^2\varphi + b^2 cos^2\varphi}.$$

Elipsa



Hiperbola

Hiperbola w postaci kanonicznej o środku symetrii w punkcie $O = (x_0, y_0)$ opisana jest w układzie współrzędnych kartezjańskich równaniem

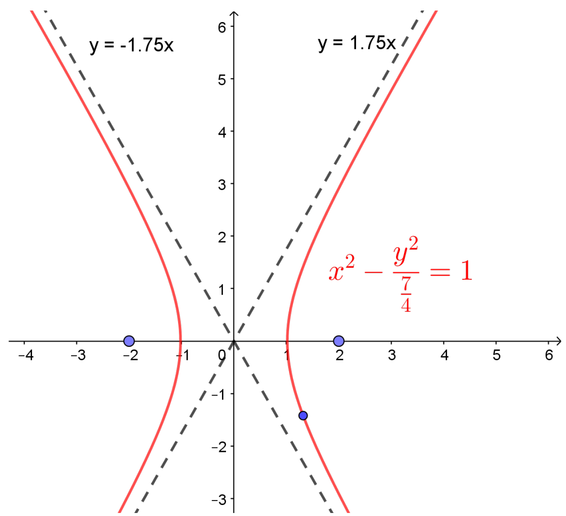
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \text{albo} \quad -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

gdzie a i b są długościami półosi (jedna z nich jest urojona), zaś proste $y = \frac{b}{a}(x-x_0) + y_0$ i $y = -\frac{b}{a}(x-x_0) + y_0$ są jej asymptotami.

W układzie współrzędnych biegunowych (φ, ρ) hiperbolę o środku symetrii w punkcie $O = (0,0)$ opisuje wzór

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{-a^2 sin^2\varphi + b^2 cos^2\varphi} \quad \text{albo} \quad r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 sin^2\varphi - b^2 cos^2\varphi}.$$

Hiperbola



Parabola

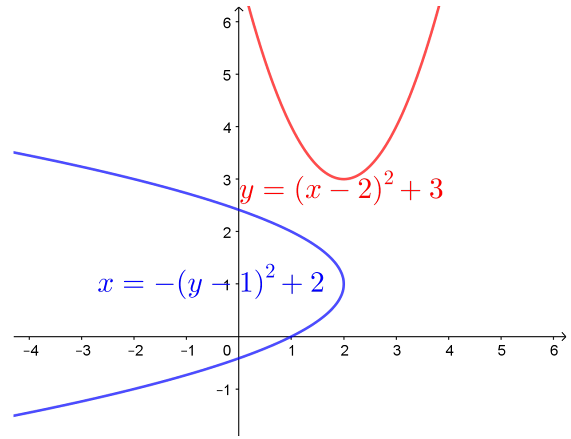
W kartezjańskim układzie współrzędnych parabola z osią symetrii równoległą do osi y, wierzchołkiem o współrzędnych $W = (x_0, y_0)$ i parametrze ogniskowym $p > 0$ opisana jest równaniem:

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0).$$

Analogicznie, parabola z poziomą osią symetrii:

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0).$$

Parabola



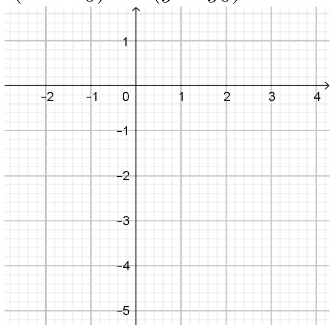
Przykład 7

Jaką krzywą stożkową przedstawia poniższe równanie?

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$$

Naszkicuj tę krzywą w układzie współrzędnych.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



Przykładowe powierzchnie drugiego stopnia

Powierzchnią drugiego stopnia nazywamy powierzchnię daną równaniem drugiego stopnia ze względu na współrzędne x, y, z:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}zx + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

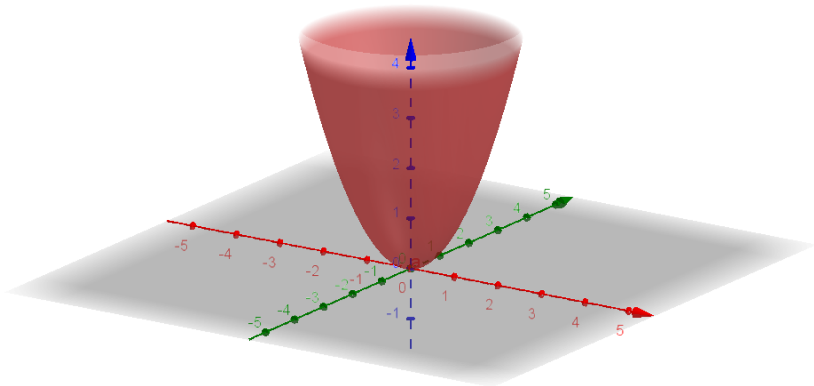
gdzie: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{13}, a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44} \in \mathbb{R}$, przy czym przynajmniej jeden ze współczynników $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{13}$ musi być różny od zera.

Paraboloida obrotowa

Wykresem funkcji

$$z = a(x^2 + y^2), \quad a \neq 0$$

jest paraboloida obrotowa tj. powierzchnia powstała z obrotu paraboli $z = ax^2$ wokół osi 0z.

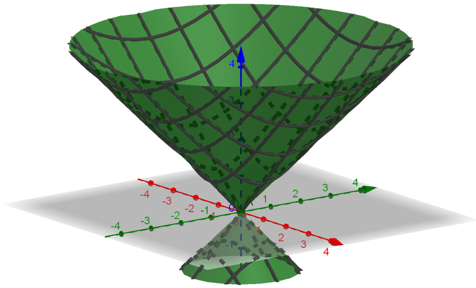


Powierzchnia stożkowa obrotowa

Powierzchnia zadana równaniem

$$z^2 = k^2(x^2 + y^2), \quad k \neq 0$$

jest powierzchnią stożkową obrotową tj. powierzchnią powstałą z obrotu prostej $z = kx$ wokół osi 0z.

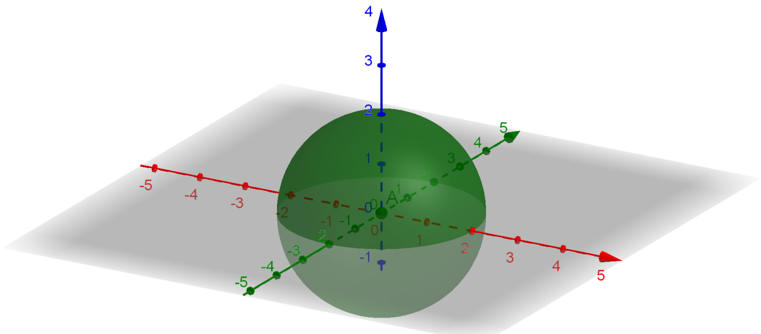


Sfera

Powierzchnia zadana równaniem

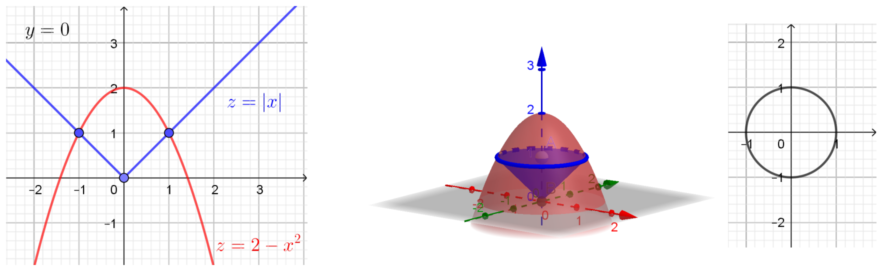
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

jest sferą o środku w punkcie $(0, 0, 0)$ i promieniu $R > 0$.



Przykład 8

Naszkicuj bryłę ograniczoną powierzchniami $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *i* $z = 2 - x^2 - y^2$ *w układzie współrzędnych.*
Powyższą bryłę zapisz we współrzędnych walcowych.



$$\rho \leqslant h \leqslant 2 - \rho^2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1$$